

1. Mirek przygotowuje kostki lodu na nadchodzące lato. Jego foremki do lodu są prostopadłościanami. Długości krawędzi tego prostopadłościanu to trzy najmniejsze nieparzyste liczby naturalne, wyrażone w centymetrach. Do każdej ze swoich foremek Mirek nalewa $\frac{2}{3}$ objętości. Wiedząc, że Mirek przygotował do użycia 1500cm^3 wody, ile kostek lodu uda mu się zrobić?

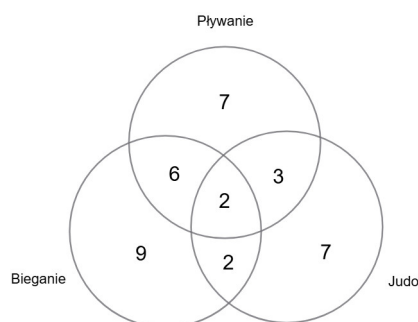
Szkic rozwiązania. Trzy najmniejsze nieparzyste liczby naturalne to 1cm, 3cm, 5cm, zatem objętość foremki to $V = 1\text{cm} \cdot 3\text{cm} \cdot 5\text{cm} = 15\text{cm}^3$. Na każdą foremkę Mirek używa zatem $\frac{2}{3} \cdot 15\text{cm}^3 = 10\text{cm}^3$. Liczba kostek lodu, jaką uda mu się zrobić, to $\frac{1500\text{cm}^3}{10\text{cm}^3} = 150$. □

-
2. W ogólnopolskim konkursie matematycznym wystartowało 2026 uczniów, a jednym z nich był Olek. Które miejsce w konkursie zajął Olek, jeżeli wiemy, że osób, które otrzymało gorszy wynik od niego jest cztery razy więcej niż osób, które uzyskały wynik lepszy od niego?

Szkic rozwiązania. Oznaczmy liczbę osób z lepszym wynikiem od Olka przez x , wtedy liczba osób o gorszym wyniku to $4x$. W konkursie poza Olkiem wzięło udział 2025 osób, zachodzi więc $x + 4x = 2025 \implies 5x = 2025 \implies x = 405$. W takim razie Olek zajął 406. miejsce. □

-
3. W klasie sportowej jest 36 uczniów i każdy z nich trenuje bieganie, pływanie bądź judo. Dwóch uczniów trenuje wszystkie trzy dyscypliny. Judo i bieganie trenuje czterech uczniów. Dziesięciu uczniów trenujących pływanie nie zajmuje się bieganiem. Pięciu uczniów uprawia pływanie i judo. Bieganie trenuje 19 uczniów. Bieganiem i pływaniem zajmuje się 8 uczniów. Ile jest uczniów w tej klasie, którzy trenują dokładnie jedną dyscyplinę sportową?

Szkic rozwiązania. Rozwiązanie przeprowadzamy za pomocą diagramu Venna.



Dokładnie jedną dyscyplinę sportową trenuje $9 + 7 + 7 = 23$ uczniów.

□

-
4. Rozwiąż układ równań, gdzie x, y, z są liczbami rzeczywistymi.

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 \\ \sqrt{y} + \sqrt{z} = 4 \\ \sqrt{z} + \sqrt{x} = 5 \end{cases}$$

Szkic rozwiązania. Dodając równania do siebie, otrzymujemy $2(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) = 12 \implies \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 6$. Podstawiając pierwsze równanie, otrzymujemy $3 + \sqrt{z} = 6 \implies \sqrt{z} = 3 \implies z = 9$. W podobny sposób otrzymujemy $y = 1$ oraz $x = 4$. □

-
5. Wewnątrz trójkąta równoramiennego ABC , $AC = BC$, o kątach miary $50^\circ, 50^\circ, 80^\circ$. obrano punkt M taki, że $\sphericalangle MAB = 30^\circ$ oraz $\sphericalangle MBA = 10^\circ$. Na prostej AM , wewnątrz trójkąta, zaznaczono punkt N taki, że $\sphericalangle ABN = 30^\circ$. Oblicz miarę kąta $\sphericalangle BMC$.

Szkic rozwiązania. Z warunków zadania wynika, że trójkąt ABN jest równoramienny, co oznacza, że N leży na dwusiecznej kąta wewnętrznego $\sphericalangle ACB$. $\sphericalangle MBN = 20^\circ$, $\sphericalangle BNM = 120^\circ$, zatem trójkąt MBN ma kąty $120^\circ, 40^\circ, 20^\circ$. CN jest dwusieczną, zatem $\sphericalangle CNB = 40^\circ$, a kąt $\sphericalangle NBC = 20^\circ$, więc trójkąt CBN ma kąty $120^\circ, 40^\circ, 20^\circ$ oraz wspólny bok BN z trójkątem MBN , czyli trójkąty MBN, CBN są przystające. W takim razie MCB jest trójkątem równoramiennym, a kąt $\sphericalangle MBC = 40^\circ$. Zatem $\sphericalangle BMC = 70^\circ$. $\square$

-
6. Udowodnij, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych powiększona o 1 jest podzielna przez 12.

Szkic rozwiązania. Trzy kolejne liczby nieparzyste możemy oznaczyć jako $2n+1, 2n+3, 2n+5$. Zapiszmy

$$(2n+1)^2 + (2n+3)^2 + (2n+5)^2 + 1 = 4n^2 + 4n + 1 + 4n^2 + 12n + 9 + 4n^2 + 20n + 25 + 1 = 12n^2 + 36n + 36 = 12(n^2 + 3n + 3)$$

Zatem jest to w oczywisty sposób liczba podzielna przez 12. $\square$

7. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n ułamek $\frac{14n+3}{21n+4}$ jest nieskracalny.

Szkic rozwiązania. Niech $d = \text{NWD}(14n+3, 21n+4)$. Wspólny dzielnik dwóch liczb dzieli również ich różnicę, zatem $d|(21n+4) - (14n+3) = 7n+1$. Analogicznie, d teraz dzieli liczby $14n+3, 7n+1$, więc również różnicę $(14n+3) - (7n+1) - (7n+1) = 1$. Wynika z tego, że $d|1$, musi więc zachodzić $d = 1$, czyli podany w zadaniu ułamek jest nieskracalny. $\square$